线性映射的对偶的零空间和值域

张朝龙

我们在 对偶空间与对偶映射 一节讨论了对偶空间和对偶映射的定义。对偶空间把线性泛函和一个特定的空间V联系起来，从对偶空间导出对偶基的概念。从一般的线性映射导出了对偶映射的概念，进而导出对偶映射的一些性质，这些性质和其对应的线性映射之间存在紧密的联系。

今天学习线性映射的对偶的零空间和值域。顾名思义，线性映射T的对偶$T^{'}$指对偶空间$\mathcal{L}(W^{'},V^{'})$中的映射，其零空间和值域按照零空间和值域的记号可以写为：$nullT^{'},rangeT^{'}$。显然对偶映射与其对应的线性映射之间存在紧密的联系，则对偶空间的零空间和值域也必然与$nullT$和$rangeT$之间存在紧密的联系。

定义 *0.1* 对于$U\subset V$，U的零化子*(annihilator)*U^0定义如下：

$$U^0=\{\varphi\in V^{'}:\forall u\in U,\varphi(u)=0\}$$

从定义可以解读，零化子是线性泛函的集合，这个线性泛函是针对V的对偶空间。属于零化子的线性泛函具有$\forall u\in U,\varphi(u)=0$的特性。

例 *0.1* 设U是$\mathcal{P}(\mathbf{R})$的用x^2乘以所有多项式所得到的子空间，若φ是$\mathcal{P}(\mathbf{R})$上由$\varphi(p)=p^{'}(0)$定义的线性泛函，则$\varphi\in U^0$

对于$U\subset V$，零化子U^0是$V^{'}$的子集。于是U^0依赖于包含U的向量空间，所以记号U_V^0或许更准确，这个记号告诉我们$U\subset V$且零化子是属于V^0的子集。

例 *0.2* 用e_1,e_2,e_3,e_4,e_5表示$\mathbf{R}^5$的标准基，用$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5$表示$(\mathbf{R}^5)^{'}$的对偶基。设：

$$U=span(e_1,e_2)=\{(x_1,x_2,0,0,0)\in\mathbf{R}^5:x_1,x_2\in\mathbf{R}\}\tag{0.1}$$

证明：$U^0=span(\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5)$

证 因为$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5$是$(\mathbf{R}^5)^{'}$的对偶基，则这个对偶基是把$\mathbf{R}^5$中的向量$x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$变为对应坐标元素的基，即：$\varphi_i(x)=x_i,\forall i\in\{1,2,3,4,5\}$

设线性泛函$\varphi\in span(\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5)$，则$\exists c_3,c_4,c_5$，使得:$\varphi=c_3\varphi_3+c_4\varphi_4+c_5\varphi_5$，显然$\varphi\in(\mathbf{R}^5)^{'}$，又因为$U=span(e_1,e_2)$，则对于$x=(x_1,x_2,0,0,0)\in$

U，有：

$$\varphi(x) = c_3\varphi_3(x) + c_4\varphi_4(x) + c_5\varphi_5(x) = 0$$

所以$\varphi \in U^0$，又由于φ的任意性，$span(\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5) \subseteq U^0$

接下来我们证明另一方面：证明$U^0 \in span(\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$。

设$\varphi \in U^0$，因为U^0是$(\mathbf{R}^5)^{'}$的子集，则φ可以表示成$(\mathbf{R}^5)^{'}$的基的线性组合，即：$\exists c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$使得：$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_5\varphi_5$，因为$\varphi \in U^0$，则对于$u \in U$，有$\varphi(u) = 0$。因为$U = span(e_1, e_2)$，$\varphi(e_1) = 0, \varphi(e_2) = 0$，进而$c_1 = 0, c_2 = 0$，所以：

$$\varphi = c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4 + c_5\varphi_5$$

即：$U^0 \subseteq span(\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$

综上有：$U^0 = span(\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$ □

定理 *0.1* 设$U \subset V$，则U^0是$V^{'}$的子空间。

证 证明这样的问题，我们可以从证明子空间的三点出发：*1.* 包含零元，*2.* 可加性，*3.* 齐次性。

U^0中包含线性泛函0是显然的。接下来我们证明可加性和齐次性。

设$\varphi, \phi \in U^0$，则对于$u \in U$，有：

$$(\varphi + \phi)(u) = \varphi(u) + \phi(u) = 0 \tag{0.2}$$

另外对于$\lambda \in \mathbf{F}, \phi \in U^0$，则对于$(\lambda\phi)(u) = \lambda(\phi(u)) = \lambda 0 = 0$

所以零化子U^0是$V^{'}$的子空间。 □

对于零化子的维数有一个结论：

定理 *0.2* 设V是有限维的，U是V的子空间，则：

$$\dim U + \dim U^0 = \dim V$$

证 证明之前，明确一下U^0，U^0是U零化子，零化子是线性泛函的集合，零化子里的线性泛函把$\forall u \in U$映射为0。

设$i \in \mathcal{L}(U, V)$是包含映射，定义如下：对$u \in U$有$i(u) = u$，则$i^{'}$是$V^{'}$到$U^{'}$的线性映射。对$i^{'}$应用线性映射基本定理有：

$$\dim range i^{'} + \dim null i^{'} = \dim V^{'} \tag{0.3}$$

而$null i^{'} = U^0$，且$\dim V^{'} = \dim V$，故上式变为：

$$\dim range i^{'} + \dim U^0 = \dim V \tag{0.4}$$

若$\phi \in U^{'}$，则ϕ可以扩张为V上的线性泛函ψ，$i^{'}$的定义表明$i^{'}(\psi) = \phi$.所以$\phi \in rangei^{'}$，这表明$rangei^{'} = U^{'}$。因此：

$$\dim rangei^{'} = \dim U^{'} = \dim U$$

综上原命题得证。 □

这个命题的证明过程综合了好多个知识点，现在我们慢慢消化它。首先：从定义$i(u) = u$和$i^{'}$是从$V^{'}$到$U^{'}$的线性映射出发。我们知道$i^{'}(\phi) = 0, \phi \in V^{'}$意味着$\phi \circ i = 0$，又因为$i$是包含映射，所以有：$\phi \in U^0$

另外对于$i^{'}$的定义，这个线性映射把一个线性泛函映射为另外一个线性泛函，要紧扣对偶映射的定义。

定理 *0.3* 设V和W都是有限维，$T \in \mathcal{L}(V, W)$，则：

1. $nullT^{'} = (rangeT)^0$
2. $\dim nullT^{'} = \dim nullT + \dim W - \dim V$

证 1. 首先假设$\varphi \in nullT^{'}$，则$0 = T^{'}(\varphi) = \varphi \circ T$，对于$v \in V$，有：

$$0 = (\varphi \circ T)(v) = \varphi(Tv)$$

于是$\varphi \in (rangeT)^0$，即

$$nullT^{'} \subseteq (rangeT)^0$$

为了证明另外一个方面,设$\varphi \in (rangeT)^0$，我们知道$(rangeT)^0 = \{\phi \in W^{'} : \forall \omega \in rangeT, \phi(\omega) = 0\}$，假设$\varphi \in (rangeT)^0$,我们要证明$\varphi \in nullT^{'}$。因为$\varphi \in (rangeT)^0$，则有：$\forall v \in rangeT, \varphi(Tv) = 0 = (\varphi \circ T)v$，显然有$\varphi \circ T = 0 = T^{'}(\varphi)$，即，

$$\varphi \in nullT^{'}$$

，即

$$(rangeT)^0 \subseteq nullT^{'}$$

2. 第二步的证明：

$$\begin{aligned}
\dim nullT^{'} &= \dim (rangeT)^0 && (0.5)\\
&= \dim W - \dim rangeT && (0.6)\\
&= \dim W - (\dim V - \dim nullT) && (0.7)\\
&= \dim nullT + \dim W - \dim V && (0.8)
\end{aligned}$$

第一个等式直接利用第一步的结果，第二个等式利用零化子的维数公式，第三个等式利用了线性映射基本定理。 □

定理 *0.4* 设V和W是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V, W)$，则T是满的当且仅当$T^{'}$是单的。

证 我们之前有$nullT^{'} = (rangeT)^0$，所以$rangeT = W$当且仅当$(rangeT)^0 = \{0\}$，当且仅当$nullT^{'} = \{0\}$，即$T^{'}$是单的。 □

定理 *0.5* 设V和W都是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V, W)$，则：

1. $\dim rangeT^{'} = \dim rangeT$
2. $rangeT^{'} = (nullT)^0$

证 首先我们证明第一个问题：

$$\begin{aligned} \dim rangeT^{'} &= \dim W^{'} - \dim nullT^{'} && (0.9) \\ &= \dim W - \dim (rangeT)^0 && (0.10) \\ &= \dim rangeT && (0.11) \end{aligned}$$

第一个等式是线性应设定里的直接使用。第二个等式是$\dim W = \dim W^{'}$和$\dim nullT^{'} - \dim (rangeT)^0$的实用。第三个等式是$\dim U + \dim U^0 = \dim V$的直接使用。

然后我们证明第二个问题：设$\varphi \in rangeT^{'}$，由于$rangeT^{'} \subseteq V^{'}$,则$\varphi \in V^{'}$。存在$\psi \in W^{'}$，使得$T^{'}(\psi) = \varphi$，设$v \in nullT$，则有$v \in V$，所以$\varphi(v) = T^{'}(\psi)(v) = \psi \circ T(v) = 0$，所以$\varphi \in (nullT)^0$，即$rangeT^{'} \subseteq (nullT)^0$

为了完成证明，我们需要证明$\dim rangeT^{'} = \dim (nullT)^0$，注意：

$$\begin{aligned} \dim rangeT^{'} &= \dim rangeT && (0.12) \\ &= \dim V - \dim nullT && (0.13) \\ &= \dim (nullT)^0 && (0.14) \end{aligned}$$

□

定理 *0.6* T是单的等价于$T^{'}$是满的。

证 映射$T \in \mathcal{L}(V, W)$是单的当且仅当$nullT = \{0\}$，当且仅当$(nullT)^0 = V^{'}$ *(*因为当$nullT = \{0\}$时，$V^{'}$中的任意一个线性泛函都可以把$nullT$中的元素映射为*0)*，当且仅当$\dim rangeT^{'} = \dim V^{'}$，即$rangeT^{'} = V^{'}$ □