练习：可逆性与同构

张朝龙

目录

1 3.D.1

问题 设$T \in \mathcal{L}(U,V)$和$S \in \mathcal{L}(V,W)$都是可逆的线性映射。证明$ST \in \mathcal{L}(V,W)$可逆且$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$

解答： 根据*3.56*，可逆映射既是单的又是满的。

假设$u,v \in U$，且$STu = STv$。根据S是单射，所以有$Tu = Tv$；再根据T是单射，所以有$u = v$.即，ST是单射。

令$w \in W$，则有$v \in V$使得$Sv = w$（因为S是满射）。对于$v \in V$，都有$u \in U$使得$Tu = v$。综上有对于任意的$w \in W$都有 $STu = w$，所以ST是满射。

因为ST既是单射又是满射所以ST是可逆的。

因为$ST(T^{-1}S^{-1}) = S(TT^{-1})S^{-1} = SS^{-1} = I$，且$T^{-1}S^{-1}ST = T^{-1}T = I$

所以有ST的逆映射是$T^{-1}S^{-1}$

2 3.D.2

问题 设V是有限维的，且$\dim V > 1$。证明V上不可逆的算子构成的集合不是$\mathcal{L}(V)$的子空间。

解答： 我们对$\dim V = 2$的例子给出反例。假设$S, T \in \mathcal{L}(V)$，且有e_1, e_2是V的标准基：

$$Te_1 = 0; Te_2 = e_2$$

$$Se_1 = e_1; Se_2 = 0$$

因为$nullT \neq \{0\}$，且$nullS \neq \{0\}$，所以S, T都是不可逆映射。

所以有

$$\begin{aligned}(S+T)e_1 &= e_1 \\ (S+T)e_2 &= e_2\end{aligned}$$

显然$S+T$是恒等映射，恒等映射是可逆映射。原命题得证。

3 3.D.3

问题 设V是有限维的，U是V的子空间，且$S \in \mathcal{L}(U, V)$。证明:存在可逆的算子$T \in \mathcal{L}(V)$使得对每个$u \in U$均有$Tu = Su$当且仅当S是单射。

解答： 首先因为T是$\mathcal{L}(V)$上的可逆算子，且满足$Tu = Su$，所以S是单射，因为T是单射。

然后假设S是单射，设U的一个基是$u_1, \ldots, u_m$，因为S是单的，则$Su_1, \ldots, Su_m$在V中也是线性独立的。我们把$u_1, \ldots, u_m$扩展成V的基：$u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$；同样，我们也可以把$Su_1, \ldots, Su_m$扩展成$V$的基，$Su_1, \ldots, Su_m, e_1, \ldots, e_n$

然后我们定义映射$T: V \to V$。满足：

$$Tu_i = Su_i, Tw_j = e_j, \quad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n \tag{3.1}$$

由于$u_1, \ldots, u_m$是U的一个基，所以可以保证上述定义T的唯一性。

对于任意的$u = a_1u_1 + \ldots + a_mu_m$,$a_i \in \mathbf{F}$，我们有：

$$\begin{aligned} Tu &= T(a_1u_1 + \ldots + a_mu_m) \\ &= a_1T(u_1) + \ldots + a_mT(u_m) \\ &= a_1S(u_1) + \ldots + a_mS(u_m) \\ &= S(a_1u_1 + \ldots + a_mu_m) \\ &= Su \end{aligned}$$

对于任意的$v \in V$，都有：

$$v = b_1u_1 + \ldots + b_mu_m + c_1w_1 + \ldots + c_nw_n \tag{3.2}$$

对上式两边进行T映射，则有：

$$\begin{aligned} Tv &= T(b_1u_1 + \ldots + b_mu_m + c_1w_1 + \ldots + c_nw_n) \\ &= b_1Tu_1 + \ldots + b_mTu_m + c_1Tw_1 + \ldots + c_nTw_n \\ &= b_1Su_1 + \ldots + b_mSu_m + c_1e_1 + \ldots + c_ne_n \end{aligned}$$

显然有：$rangeT \subseteq V$。

另外一方面$Tu_1, \ldots, Tu_m, Tw_1, \ldots, Tw_n$包含于$rangeT$ 所以 $span(Tu_1, \ldots, Tu_m, Tw_1, \ldots, Tw_n) \subseteq rangeT$

所以T是满射。又因为3.69（对于有限维空间上的映射而言，满射意味着单射，意味着可逆映射），所以T是可逆映射。

4 3.D.4

问题 设W是有限维的，$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$，证明：$nullT_1 = nullT_2$当且仅当存在可逆的算子$S \in \mathcal{L}(W)$使得$T_1 = ST_2$

解答： 假设有$nullT_1 = nullT_2$，因为W是有限维的，所以$rangeT_2$也是有限维的。假设$w_1, \ldots, w_n$是$rangeT_2$的一个基，所以存在$v_1, \ldots, v_n \in V$使得$T_2v_i = w_i, i = 1, \ldots, n$，$v_1, \ldots, v_n$的存在性可以通过线性映射基本定理得到满足.

现在证明$V = nullT_2 \oplus span(v_1, \ldots, v_n)$，对于任何$v \in V$，存在$a_i \in \mathbf{F}, i \in \{1, \ldots, n\}$我们有：

$$T_2v = a_1w_1 + \ldots + a_nw_n \tag{4.1}$$

因此有:

$$T_2(v - a_1v_1 - \ldots - a_nv_n) = 0 \tag{4.2}$$

也就是说：

$$v = (v - a_1v_1 - \ldots - a_nv_n) + (a_1v_1 + \ldots + a_nv_n)$$

又因为v的任意性，所以：

$$V = nullT_2 + span(v_1, \ldots, v_n) \tag{4.3}$$

接下来我们证明直和的条件成立，即$nullT_2 \cap span(v_1, \ldots, v_n) = \{0\}$ 假设$a_1v_1 + \ldots + a_nv_n \in nullT_2$我们有：

$$T_2(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = a_1w_1 + \ldots + a_nw_n = 0 \tag{4.4}$$

因为$w_1, \ldots, w_n$是线性无关的，所以$a_1, \ldots, a_n$都是零。所以:

$$V = nullT_2 \oplus span(v_1, \ldots, v_n) \tag{4.5}$$

同样的，因为$v_1, \ldots, v_n$是线性无关的，所以$T_1v_1, \ldots, T_1v_n$也是线性无关的。又因为$nullT_1 = nullT_2$，所以有：

$$0 = T_2(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = a_1w_1 + \ldots + a_n \tag{4.6}$$

现在我们扩展两个W的基，一个从$T_1v_1, \ldots, T_1v_n$扩展到$T_1v_1, \ldots, T_1v_n, f_1, \ldots, f_m$，另一个从$w_1, \ldots, w_n$扩展到$w_1, \ldots, w_n, e_1, \ldots, e_m$。在这两个基之间我们定义$S \in \mathcal{L}(W)$使得：

$$Sw_i = T_1v_i, Se_j = f_j, i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m \tag{4.7}$$

之前我们有$V = nullT_2 \oplus span(v_1, \ldots, v_n)$ 所以对于任何的$v \in V$可以写成：

$$v = v_{null} + a_1v_1 + \ldots + a_nv_n \tag{4.8}$$

所以有：

$$\begin{aligned}
ST_2(v) &= ST_2(v_{null} + a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) \\
&= ST_2(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) \\
&= S(a_1w_1 + \ldots + a_nw_n) \\
&= a_1T_1(v_1) + \ldots + a_nT_1(v_n) \\
&= T_1(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) \\
&= T_1(v_{null} + a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) \\
&= T_1(v)
\end{aligned}$$

所以有$ST_2 = T_1$。因为S是满射，因此S是单射。

另一方面假设存在可逆映射$S \in \mathcal{L}(W)$满足$ST_2 = T_1$，对于任何$\mu \in nullT_1$，我们有:

$$ST_2\mu = T_1\mu = 0 \tag{4.9}$$

因为S是单射所以，其零空间等于$\{0\}$，所以$T_2\mu = 0$，因此$\mu \in nullT_2$。所以$nullT_1 \subseteq nullT_2$，同样的，考虑到$T_2 = S^{-1}T_1$我们有$nullT_2 \subseteq nullT_1$,所以有$nullT_1 = nullT_2$

5 3.D.5

问题 设V是有限维的，$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$。证明：$rangeT_1 = rangeT_2$当且仅当存在可逆的算子$S \in \mathcal{L}(V)$使得$T_1 = T_2S$

解答： 我们假设$rangeT_1 = rangeT_2$，令$u_1, \dots, u_m$是$nullT_1$的一个基，我们可以把这个基扩展为V的一个基$u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$。那么根据线性映射基本定理的证明过程我们有：$rangeT_1 = span(Tw_1, \dots, Tw_n)$，另外$Tw_1, \dots, Tw_n$是线性独立的。因为$rangeT_1 = rangeT_2$那么存在$v_1, \dots, v_n \in V$使得$T_1w_i = T_2v_i, i = 1, \dots, n$因为$T_1w_1, \dots, T_1w_n$是线性独立的，那么$T_2v_1, \dots, T_2v_n$也是线性独立的，所以$v_1, \dots, v_n$也是线性独立的。由于$rangeT_1 = rangeT_2$，则有$nullT_1 = nullT_2$，令$\zeta_1, \dots, \zeta_m$是$nullT_2$的一个基，那么$\zeta_1, \dots, \zeta_m, v_1, \dots, v_n$是$V$的一个基。我们定义$S \in \mathcal{L}(V)$，使得：

$$Su_i = \zeta_i, \quad Sw_j = v_j \tag{5.1}$$

那么我们有：

$$T_1w_j = T_2v_j = T_2Sw_j, j = 1, \dots, n \tag{5.2}$$

且：

$$T_1u_i = 0 = T_2\zeta_i = T_2Su_i, i = 1, \dots, m \tag{5.3}$$

因此$T_1 = T_2S$，因为我们定义S是在V的一个基上定义的，所以其唯一性得到保证。又因为S是满射，所以S是可逆的。

如果存在一个可逆线性映射$S \in \mathcal{L}(V)$使得$T_1 = T_2S$，那么对于$\forall \mu \in V$都有：

$$T_1\mu = T_2S\mu \in rangeT_2 \tag{5.4}$$

所以$rangeT_1 \subseteq rangeT_2$。

因为S是可逆的，所以$T_2 = T_1S^{-1}$，我们会得到$rangeT_2 \subseteq rangeT_1$.综上我们得到了$rangeT_1 = rangeT_2$。

这个题目和上一个题目在证明过程中有些许类似，总结如下：

1. 都在一个空间上构建了两个基，并在这两个基之间构建了一个可逆映射。
2. 都用到了基于基构建的线性映射的唯一性。可见*3.5*非常重要。*3.5*告诉我们基于定义域的基构建的线性映射具有唯一性。
3. 都用到了*3.22*线性映射基本定理证明的过程。
4. 都用到了一个命题：假设$T \in \mathcal{L}(V, W)$且$v_1, \ldots, v_m$是V的一个向量组，满足$Tv_1, \ldots, Tv_m$是线性独立的，那么$v_1, \ldots, v_m$是线性独立的。证明过程很简单。值得注意的是这个问题反过来却不一定成立。即我们不能说$v_1, \ldots, v_m$是线性独立的，就说$Tv_1, \ldots, Tv_m$是线性独立的。因为：

$$a_1Tv_1 + \ldots + a_mTv_m = T(a_1v_1 + \ldots + a_mv_m) = 0 \tag{5.5}$$

并不意味着$a_1v_1 + \ldots + a_mv_m = 0$。因为有可能$a_1v_1 + \ldots + a_mv_m \in nullT$ 。在线性映射基本定理*3.22*的证明过程中考虑到了这一个问题。

6 3.D.6

问题 设V和W都是有限维的，$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$，证明：存在可逆的算子$R \in \mathcal{L}(V)$和$S \in \mathcal{L}(W)$使得$T_1 = ST_2R$当且仅当$\dim nullT_1 = \dim nullT_2$

解答： 从正反两个方面完成这个命题的证明。

首先假设存在可逆算子$R \in \mathcal{L}(V)$和$S \in \mathcal{L}(W)$满足$T_1 = ST_2R$，那么$S_{-1}T_1 = T_2R$，因此（根据*3.D.4*）$nullT_1 = nullT_2R$。因为$rangeT_2R = rangeT_2$，所以我们有：

$$\dim nullT_2R = \dim V - \dim rangeT_2R = \dim V - \dim rangeT_2 = \dim nullT_2 \tag{6.1}$$

因此$\dim nullT_1 = \dim nullT_2$

然后证明另一方面。如果$\dim nullT_1 = \dim nullT_2$，假设$u_1, \ldots, u_m$是$nullT_1$的一个基，我们可以把这个基扩展为$V$的一个基$u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$。假设$v_1, \ldots, v_m$是$nullT_2$的一个基，我们同样可以把这个基扩展为$V$的一个基$v_1, \ldots, v_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$。我们有$T_1w_1, \ldots, T_1w_n$在$W$中是线性独立的，所以我们可以把这个线性无关组扩展

成为W中的一个基$T_1w_1,\ldots,T_1w_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_l$，同理，$T_2\zeta_1,\ldots,T_2\zeta_n$在$W$中也是线性无关组，因此可以扩展成$W$的一个基$T_2\zeta_1,\ldots,T_2\zeta_n,\beta_1,\ldots,\beta_l$,对于$V$中的两个基，定义线性映射$R\in\mathcal{L}(V)$

$$Ru_i=v_i,Rw_j=\zeta_j,i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n \tag{6.2}$$

对于W中的两个基，定义线性映射$S\in\mathcal{L}(W)$：

$$ST_2\zeta_j=T_1w_j,S\beta_k=\alpha_k,j=1,\ldots,n;k=1,\ldots,l \tag{6.3}$$

因为S和R是从基到基的映射，因此S和R是可逆算子。

综上有$T_1=ST_2R$

7 3.D.7

问题 设V和W是有限维的，$v\in V$，$E=\{T\in\mathcal{L}(V,W):Tv=0\}$ 证明E是$\mathcal{L}(V,W)$的子空间。

解答： 证明子空间只需要做三件事情，证明0的存在，证明齐次可加性。

对于这个题目，显然$0\in E$。

假设$T,S\in E$，则有

$$(T+S)v=Tv+Sv=0+0=0 \tag{7.1}$$

所以$T+S\in E$。对于任意的$\lambda\in\mathbf{F}$：

$$(\lambda T)v=\lambda(Tv)=0 \tag{7.2}$$

问题 假设$v\neq 0$，则$\dim E$等于多少？

解答： 因为$v\neq 0$，我们可以把v扩展成V的一个基$v,v_2,\ldots,v_n$，假设$w_1,\ldots,w_m$是W的一个基。在这两个基下，$\mathcal{L}(V,W)$和$\mathbf{F}^{m,n}$是同构的。

现在因为$Tv=0$，根据线性映射与矩阵的关系，我们知道$\mathcal{M}(T)$的第一列必须死全零。因此E和第一列是全零的$\mathbf{F}^{m,n}$同构，因为$\dim E=\dim\mathbf{F}^{m,n}=m(n-1)=\dim W(\dim V-1)$

另外这个映射T可以看做是从$span(v_2,\ldots,v_n)$向W的映射。