练习：矩阵

张朝龙

目录

本章的题目都不难，只要紧扣线性映射矩阵的定义和矩阵加法，矩阵标量乘法，矩阵乘法的定义即可轻松完成所有题目。为节省时间，最后几个题目略去不提。

1 3.C.1

问题 设V和W都是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V, W)$,证明对于V和W的任意基，

T的矩阵都至少有$\dim rangeT$个非零元

解答： 首先我们知道$rangeT$中一定有$\dim rangeT$个线性无关的向量$u_1, u_2, \ldots, u_m$，$m = \dim rangeT$。$rangeT$就是由这些向量张成的子空间。

2 3.C.2

问题 设$D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3(\mathbf{R}), \mathcal{P}_2(\mathbf{R}))$是微分映射$Dp = p^{'}$，求$\mathcal{P}_3(\mathbf{R})$的一个基和$\mathcal{P}_2(R)$的一个基，使得$D$ 关于这些基的矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

解答： 这里在重复一下根据线性映射定义矩阵的过程。假设V的基是$v_1, \ldots, v_n$，W的基是$w_1, \ldots, w_m$，有线性映射$T \in \mathcal{L}(V, W)$，则T关于V和W的两个基定义的矩阵是A，则有

$$Tv_k = A_{1,k}w_1 + \ldots + A_{m,k}w_m \tag{2.1}$$

对于题目中给定的矩阵。我们有：

$$Tv_1 = w_1 \tag{2.2}$$

$$Tv_2 = w_2 \tag{2.3}$$

$$Tv_3 = w_3 \tag{2.4}$$

$$Tv_4 = 0 \tag{2.5}$$

一个可能的组合是:V的基为$\{x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, 1\}$，$W$的基为$1, x, x^2$ 。

显然有：

$$\begin{aligned} T(x) &= 1 \\ T(x^2/2) &= x \\ T(x^3/3) &= x^2 \\ T(1) &= 0 \end{aligned}$$

3 3.C.3

问题 设V和W都是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V, W)$.证明存在V的一个基和W的

一个基使得关于这些基，$\mathcal{M}(T)$除了第j行第j列$1 \leq j \leq \dim rangeT$的元素意外，其余元素都为0

解答： 根据线性映射矩阵定义，$\mathcal{M}(T)$的行是$rangeT$基的大小。我们定义线性映射：

$$Tv_k = w_k, k = 1, \ldots, \dim rangeT \tag{3.1}$$

$$Tv_k = 0, k = \dim rangeT + 1, \ldots, \dim V \tag{3.2}$$

这个映射对应的矩阵就是题目中所描述的矩阵。

在证明过程中，采用的思路和证明线性映射基本定理相同。

4 3.C.4

问题 设$v_1, \ldots, v_m$是V的基，且W是有限维的。设$T \in \mathcal{L}(V, W)$。证明存在W的一个基$w_1, \ldots, w_n$使得在T关于基$v_1, \ldots, v_m$和$w_1, \ldots, w_n$的矩阵$\mathcal{M}(T)$中，除了第一行第一列的元素可能为*1*之外，第一列的其余元素均为*0*.

解答： 存在映射：$T \in (V, W)$满足：

$$\begin{aligned} Tv_1 &= w_1 \\ Tv_2 &= w_1 + w_2 \\ \vdots \quad &\vdots \\ Tv_n &= w_{n-1} + w_n \end{aligned}$$

5 3.C.5

问题 设$w_1, \ldots, w_n$是W的一个基，且V是有限维的。设$T \in \mathcal{L}(V, W)$。证明存在V的一个基$v_1, \ldots, v_m$使得，在T关于$v_1, \ldots, v_m$和$w_1, \ldots, w_n$的矩阵$\mathcal{M}(T)$中，除了第一行第一列的元素可能为*1*之外，第一行的其余元素均为*0*。

解答： 这个题目的证明和*3.C.4*类似。略。做这样的题目的时候最好把从线性映射定义矩阵的过程给默想一遍。

6 3.C.6

问题 设V和W都是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 证明$\dim rangeT = 1$当且仅当V和W各有一个基使得关于这些基$\mathcal{M}(T)$的所有元素都是*1*.

解答： 我们先从当V和W各有一个基使得关于这些基$\mathcal{M}(T)$的所有元素都是*1*导出$\dim rangeT = 1$

根据线性映射基本定理的证明过程，我们知道V的基中存在一个线性无关组$u_1, \ldots, u_n$张成了$nullT$，而另外一些线性无关向量$v_1, \ldots, v_m$是基于$u_1, \ldots, u_n$扩展而来的。

假设 $w_1, \ldots, w_p$是W的一个基，定义线性映射：

$$\begin{aligned} Tv_1 &= w_1 + \ldots + w_p \\ \vdots &\quad \vdots \\ Tv_n &= w_1 + \ldots + w_p \end{aligned}$$

这个线性映射满足$\dim rangeT = 1$

接下来我们证明另外一方面.因为$\dim rangeT = 1$，我们有以上定义的线性映射满足$\mathcal{M}(T)$的所有元素都是*1*。

证明这个命题，主要还是采用线性映射基本定理中的方法。

7 3.C.7

问题 验证 *3.36*

解答： 从线性映射的矩阵定义出发。略。

8 3.C.8

问题 验证*3.38*

解答： 从线性映射的矩阵定义出发。

9 3.C.9

问题 证明*3.52*

解答： 从矩阵乘法定义出发。假设

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \ldots & A_{m,n} \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

则Ac是一个$m\times 1$的列向量。并且有：

$$Ac=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n A_{1,i}c_i\\ \sum_{i=1}^n A_{2,i}c_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^n A_{mi}c_i\end{bmatrix}\tag{9.2}$$

通过对上式右端展开，得：

$$Ac=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n A_{1,i}c_i\\ \sum_{i=1}^n A_{2,i}c_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^n A_{mi}c_i\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}A_{1,1}\\ A_{2,1}\\ \vdots\\ A_{m,1}\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}A_{1,2}\\ A_{2,2}\\ \vdots\\ A_{m,2}\end{bmatrix}+\ldots+c_n\begin{bmatrix}A_{1,n}\\ A_{2,n}\\ \vdots\\ A_{m,n}\end{bmatrix}$$

10 3.C.10

问题 设A是$m\times n$矩阵，C是$n\times p$矩阵。证明对于$1\le j\le m$ $(AC)_{j,\cdot}=A_{j,\cdot}C$

也就是说，证明AC的第j行等于A的第j行乘以C

解答： 略去证明。

在学习*MIT Strang*教授的线性代数时掌握这种观点。AC的每一行是C的行向量的线性组合，线性组合系数是A对应的行的元素。

11 3.C.11

问题 设$a=(a_1 \quad \ldots \quad a_n)$是$1\times n$矩阵，$C$是$n\times p$矩阵。证明

$$aC=a_1C_{1,\cdot}+\ldots+a_nC_{n,\cdot}$$

解答： 此题是*3.C.10* 的特例。