向量空间的商

张朝龙

为了定义向量空间的商，我们先定义向量与子空间的和。

定义 *0.1* 设 $v \in V$，U是V的子空间，则$v+U$是V的子集，定义如下：

$$v + U = \{v + u : u \in U\}$$

例 *0.1* 设 $U = \{(x, 2x) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R}\}$。显然$U$是$\mathbf{R}^2$中过原点的斜率为2的直线。因此$(17, 20) + U$是过$(17, 20)$且斜率为2的直线。

定义 *0.2* V的仿射子集是V的形如$v + U$的子集，其中$v \in V$，U是V的子空间。对于$v \in V$和V的子空间U，称仿射子集$v + U$平行于U.

定义 *0.3* 设U是V的子空间，则商空间V/U是指V的所有平行于U的仿射子集的集合，也就是说:

$$V/U = \{v + U : v \in V\}$$

例 *0.2*

1. 若$U = \{(x, 2x) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R}\}$，则$\mathbf{R}^2/U$是$\mathbf{R}^2$中所有斜率为2的直线的集合。
2. 若U是$\mathbf{R}^3$中包含远点的直线，则$\mathbf{R}^3/U$是所有平行于U的直线的集合。
3. 若U是$\mathbf{R}^3$中包含远点的平面，则$\mathbf{R}^3/U$ 是 $\mathbf{R}^3$中所有平行于U的平面的集合。

定理 *0.1* 设U是V的子空间，$v, w \in V$，则以下陈述等价：

1. $v - w \in U$
2. $v + U = w + U$
3. $(v + U) \cap (w + U) \neq \emptyset$

证 首先证明 *1.* $\to$ *2.* 假设$v - w \in U$ 我们有对于任意$u \in U v + u = w + ((v - w) + u) \in w + U$，因此$v + U \subset w + U$，类似的我们可以证明$w + U \subset v + U$，因此$v + U = w + U$.

$2 \to 3$ 是显然的。

最后我们证明 $3 \to 1$. 假设$(v + U) \cap (w + U) \neq \emptyset$则有 $u_1, u_2 \in U$使得

$$v + u_1 = w + u_2$$

则有$v - w = u_2 - u_1$，因此$v - w \in U$. □

定义 *0.4* 设U是V的子空间，则V/U上的加法和标量乘法定义为：对任意$v, w \in V$和$\lambda in \mathbf{F}$

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U$$

$$\lambda(v + U) = (\lambda v) + U$$

定理 *0.2* 设U是V的子空间，则V/U按照商空间上加法和标量乘法定义构成向量空间。

证 在上面定义的V/U上的加法和标量乘法中，一个潜在的问题是平行于U的仿射子集的表示并不是唯一的。具体来讲，设$v, w \in V$，假设$\hat{v}, \hat{w} \in V$使得$v + U = \hat{w} + U$，要证明上面给出的V/U上的加法是有意义的，必须证明$(v + W) + U = (\hat{v} + \hat{w}) + U$，于是有

$$v - \hat{v} \in U, w - \hat{w} \in U$$

因为U是V的子空，所以在加法下封闭，这说明$(v-\hat{v})+(w-\hat{w})\in U$.所以

$$(v+w)-(\hat{v}+\hat{w})\in U$$

然后有：

$$(v+w)+U=(\hat{v}+\hat{w})+U$$

因此V/U上定义的加法是合理的。

假设$\lambda\in\mathbf{F}$，因为U是V的子空间，所以在标量乘法下封闭，从而有$\lambda(v-\hat{v})\in U$，于是$\lambda u-\lambda\hat{u}\in U$. 所以$\lambda u+U=\lambda\hat{u}+U$，即$V/U$上的标量乘法是有意义的。

接下来我们只需要证明0元存在，加法和标量乘法封闭即可。 □

定义 *0.5* 设U是V的子空间。商映射π定义为$\pi:V\to V/U$对任意的$v\in V$，有$\pi(v)=v+U$

定理 *0.3* 设V是有限维的，U是V的子空间，则$\dim V/U=\dim V-\dim U$

证 设π是V到V/U的商映射。则$null\pi=U, range\pi=V/U$,则$\dim V=\dim U+\dim V/U$ □

定义 *0.6* 设$T\in\mathcal{L}(V,W)$，定义$\tilde{T}:V/(nullT)\to W$为：

$$\tilde{(}T)(v+nullT)=Tv$$

定理 *0.4* 设$T\in\mathcal{L}(V,W)$,则

1. $\tilde{T}$是$V/(nullT)$到W的线性映射；
2. $\tilde{T}$是单的；
3. $range\tilde{T}=rangeT$;
4. $V/(nullT)$同构于$rangeT$