递归问题：约瑟夫问题

emacsun

目录

1 问题描述

这是一个生死攸关的问题！至于如何生死攸关参见《具体数学》1.3节 The Josephus Problem。现在做如下简化：假设有 n 个人站成一圈，现在要每隔一个删除一个人，直到只有一个人幸存下来。例如 $n = 10$ 的情形如图1所示：

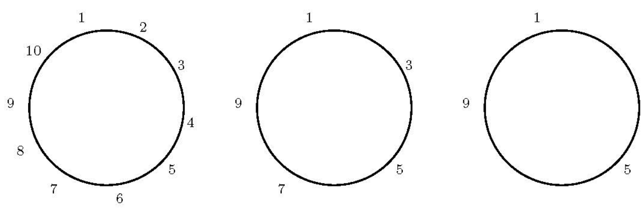

图 1： n=10的约瑟夫问题

消去的顺序是：2,4 6,8,10,3,7,1,9，于是5幸存下来。问题：确定幸存者的号码 $J(n)$？

2 约瑟夫问题递归式

因为有 $J(10) = 5$，所以我们猜测有 $J(n) = \frac{n}{2}$，但是一些简单的如同下表的例子否定了这个猜测。

n	1	2	3	4	5	6
J_n	1	1	3	1	3	5

不过我们可以大胆猜测， $J(n)$一定是奇数，因为绕圈走一圈就消去了全部的偶数。如果 n 是偶数，则走一圈后除了仅剩下一半人口并且他们的号码有变化外，我们面临的情形是与刚开始相同的情形，如下图所示：

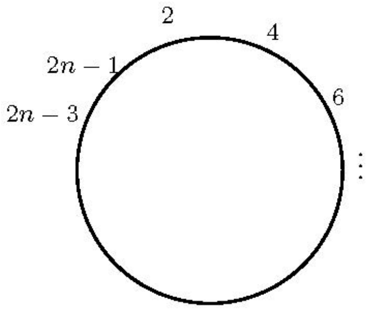

图 2: n为偶数时的约瑟夫问题

如此，规模为 $2n$ 问题就变成了规模为 n 的问题。这个规模为 n 的问题与原来相比只是在人员的序号上有所不同，具体说来就是除了每个人的号码加倍并减去1外， $J(2n)$ 问题和 $2J(n)-1$问题没有什么区别。即

$$J(2n) = 2J(n) - 1, n \geq 1 \tag{2.1}$$

由上文我们知道 $J(10) = 5$，几乎瞬间我们就会知道 $J(20) = 2J(10) - 1 = 2 * 5 - 1 = 9$。如此可以瞬间解决所有的 $J(5 * 2^m), m \geq 1$问题， $J(5 * 2^m) = 2J(5 * 2^{m-1}) + 1 = 2 * 2^m + 1 = 2^{m+1} + 1$，这一步隐含了数学归纳法的证明过程。

假设 n 是奇数，与偶数不同的情形在于，转第一圈后就把编号为1的人给杀掉了，第二圈开始是从编号为3的人开始的，第二圈开始后第一个要杀掉的人是5。

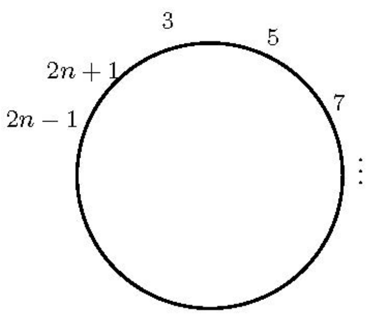

图 3: n为奇数时的约瑟夫问题

如此， $J(2n+1)$问题就简化为 $2J(n)+1$问题，即：

$$J(2n+1) = 2J(n) + 1, n \geq 1 \tag{2.2}$$

综上，约瑟夫问题递归式可以总结为：

$$
\begin{aligned}
J(1) &= 1 \\
J(2n) &= 2J(n) - 1 \\
J(2n+1) &= 2J(n) + 1
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

3 约瑟夫递归式的解

从约瑟夫递归式可以看出，不同于汉诺塔和披萨饼问题，约瑟夫问题递归式给出的不是 $J(n)$ 和 $J(n-1)$ 之间的递归关系，而是 $J(2n)$ 或者 $J(2n-1)$ 与 $J(n)$ 之间的关系。

有了递归式，我们计算一些较小的值

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
J_n	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

显然，从上面的表格中可以看出，将 n 按照 2的幂次进行分组或许会出现一些转机。每一组开始的 $J(n)$ 总是等于1。仔细观察上表，如果将 n 写作 $2^m + l$，则 $J(n) = J(2^m + l) = 2l + 1, m \geq 0 \leq l < 2^m$. 其中 2^m是不超过 n 的 2的最大幂，而 $l = n - 2^m$。事实上，可以对 m 使用数学归纳法证明：

$$
J(n) = J(2^m + l) = 2l + 1, m \geq 0 \leq l < 2^m \tag{3.1}
$$

如此，我们得出了约瑟夫问题的闭式解。对于 $J(100)$ 因为 $100 = 2^6 + 36$，所以 $J(100) = 2 * 36 + 1 = 73$

4 拓展1:二进制与约瑟夫问题

接下来我们针对约瑟夫问题做一些深入的挖掘。在求解约瑟夫问题递归式闭式解的过程中， n 和 $J(n)$ 的以2为基的表示发挥着重要的作用，我们自然要研究以2为基的表示与约瑟夫问题之间的关系。假设 n 的二进制表示为：

$$
n = (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2 \tag{4.1}
$$

即， $n = b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + b_1 2 + b_0$，其中 $b_i, i = 0, 1, \dots, m-1$ 为 0 或者 1。 $b_m = 1$，注意 $n = 2^m + l$，所以：

$$
\begin{aligned}
n &= (1 b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2 && (4.2) \\
l &= (0 b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2 && (4.3) \\
2l &= (b_{m-1} \dots b_1 b_0 0)_2 && (4.4) \\
2l + 1 &= (b_{m-1} \dots b_1 b_0 1)_2 && (4.5) \\
J(n) &= (b_{m-1} \dots b_1 b_0 b_m)_2 && (4.6)
\end{aligned}
$$

即，我们得到了：

$$J((b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2) = (b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0 b_m)_2 \tag{4.7}$$

在计算机程序设计过程中，只需要对 n 的二进制表示循环左移1位即可得到 $J(n)$!!!这是多么的令人激动啊！在刚开始的时候，我们看约瑟夫问题显得好困难，但是，此刻我们只需要对n 的二进制表示循环左移1位即可得到 $J(n)$!!! 对一个问题深入分析竟然可以得到如此精妙而简洁的答案！高老头不愧是高老头！

还以 $J(100)$ 为例，因为 $100 = (1100100)_2$，所以 $J((1100100)_2) = (1001001)_2 = 73$!!!

5 拓展2:更一般的约瑟夫递归式

接下来跟进一步深入挖掘该问题，对约瑟夫递归式做更进一步的推广。如下：

$$\begin{aligned} f(1) &= \alpha \\ f(2n) &= 2f(n) + \beta \\ f(2n+1) &= 2f(n) + \gamma \end{aligned} \tag{5.2}$$

可以看出在约瑟夫问题中， $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1$。接下来，我们依然从小入手，得出下表

n	$f(n)$
1	α
2	$2\alpha+\beta$
3	$2\alpha+ +\gamma$
4	$4\alpha+3\beta$
5	$4\alpha+2\beta+\gamma$
6	$4\alpha+\beta+2\gamma$
7	$4\alpha+ +3\gamma$
8	$8\alpha+7\beta$
9	$8\alpha+6\beta+\gamma$

从上表我们可以看出， α 的系数是2的幂，且不超过n。 β 的系数则从2的幂减一递减到0，γ 的系数则从0开始递增直到2的幂减一。于是式(2.1)的解可以表示为：

$$f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma \tag{5.3}$$

则， $A(n), B(n), C(n)$可以分别表示为：

$$\begin{aligned} A(n) &= 2^m \\ B(n) &= 2^m - 1 - l \\ C(n) &= l \end{aligned} \tag{5.5}$$

其中， $n=2^m+l, 0\le l<2^m, n\ge 1$. 对式(5.3)用数学归纳法可以证明。

联想到之前采用二进制表示约瑟夫问题的解：

$$J((b_m b_{m-1}\dots b_1 b_0)_2)=(b_{m-1}b_{m-2}\dots b_1 b_0 b_m)_2 \tag{5.6}$$

n 的循环左移即是 $J(n)$ 的解。那么对于式(5.6) 这个更一般的推广，有没有二进制表示呢？当然有！首先式（5.6）可以改写为：

$$\begin{aligned} f(1)&=\alpha \\ f(2n+j)&=2f(n)+\beta_j, j=0,1 \end{aligned} \tag{5.8}$$

则式(5.8)可以改写为：

$$\begin{aligned} f((b_m b_{m-1}\dots b_1 b_0)_2)&=2f((b_m b_{m-1}\dots b_2 b_1)_2)+\beta_{b_0} \\ &=4f((b_m b_{m-1}\dots b_3 b_2)_2)+2\beta_{b_1}+\beta_{b_0} \\ &=8f((b_m b_{m-1}\dots b_4 b_3)_2)+4\beta_{b_2}+2\beta_{b_1}+\beta_{b_0} \\ &\vdots \\ &=2^m f((b_m)_2)+2^{m-1}\beta_{b_{m-1}}+\dots+2\beta_{b_1}+\beta_{b_0} \\ &=2^m\alpha+2^{m-1}\beta_{b_{m-1}}+\dots+2\beta_{b_1}+\beta_{b_0} \end{aligned} \tag{5.10}$$

最后，可得：

$$f((b_m b_{m-1}\dots b_1 b_0)_2)=(\alpha\beta_{b_{m-1}}\beta_{b_{m-2}}\dots\beta_{b_1}\beta_{b_0})_2 \tag{5.11}$$

事实上我们对 $f(n)$的前几个解稍加整理即可看出式 (5.11) 的精妙。如下表

n	$f(n)$
1	α
2	$2\alpha+\beta$
3	$2\alpha+\gamma$
4	$4\alpha+2\beta+\beta$
5	$4\alpha+2\beta+\gamma$
6	$4\alpha+2\gamma+\beta$
7	$4\alpha+2\gamma+\gamma$

在此，我们有 $\beta_0=\beta, \beta_1=\gamma$. 仍然以 $J(100)$ 为例，因为 $100=(1100100)_2$，其解为：

$$(\alpha\beta_{b_{m-1}}\beta_{b_{m-2}}\dots\beta_{b_1}\beta_{b_0})_2=(1\beta_1\beta_0\beta_0\beta_1\beta_0\beta_0)_2 \tag{5.12}$$

因为 $\alpha=1, \beta_0=\beta=-1, \beta_1=\gamma=1$ ，所以式(5.12)可以重写为：

$$(1\beta_1\beta_0\beta_0\beta_1\beta_0\beta_0)_2=(1\quad 1\quad -1\quad -1\quad 1\quad -1\quad -1)_2=73 \tag{5.13}$$

注意在此，我们突破了二进制只有0和1的限制，不过这一突破使得约瑟夫的解更加的精炼。

6 推广3:不同基底的约瑟夫递归式

可以沿着推广2的思路走的更远，我们对式(5.8) 做更进一步修改：

$$\begin{aligned} f(j) &= \alpha_j, 1 \le j < d \\ f(dn+j) &= cf(n) + \beta_j, 0 \le j < d \end{aligned} \tag{6.2}$$

式(6.2)有变动基数的解：

$$f((b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_d) = (\alpha_{b_m} \beta_{b_{m-1}} \beta_{b_{m-2}} \dots \beta_{b_1} \beta_{b_0})_c \tag{6.3}$$

7 推广4:倒数第二个位置

约瑟夫有一个朋友，他站在倒数第二个位置上因而获救。当每隔一个人就有一个人被处死时，倒数第二个幸存者 $I(n)$ 的号码是多少？

每隔一个人就有一个人被处死的约瑟夫问题解为：

$$J(n) = J(2^m + l) = 2l + 1 \tag{7.1}$$

此时有： $2l+1 = n-1 \rightarrow n = 2l+2$ ，满足此式的 n 总是倒数第二个位置上的人获救。