递归问题：瑞士披萨

emacsun

目录

1 问题描述

用一把披萨刀直直的切 n刀，可以最多获得多少块披萨(不要求每块披萨形状一样)。更学术一点的表述为：平面上 n条直线所能界定的区域的最大个数 L_n是多少？

2 从小入手

按照我们探讨汉诺塔的思路，先从小入手。

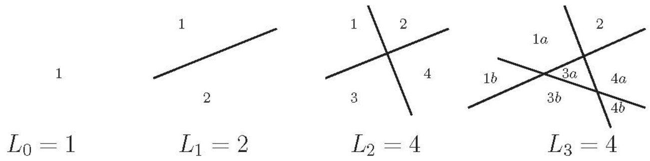


图 1: 切1,2,3刀的结果

可以看出第三条直线对原有的三个区域（区域1,3,4）进行了分割，使得区域个数增加了三个，而第三条直线与原来的两条直线有交点。推而广之，第 n条直线可以使得区域个数增加 k个，当前仅当第 n条直线对已有的 k个区域进行了分割；第 n条直线对已有的 k个区域进行分割，当前仅当它与已有的 $k-1$ 条直线有交点。两条直线之多有一个交点，因此这条新的直线与已经存在的 $n-1$ 条直线至多有 $n-1$ 个交点，故必有 $k \leq n$。

3 披萨递归式

通过上节分析，有：

$$L_n \leq L_{n-1} + n, n > 0 \tag{3.1}$$

另外，很容易分析，上式中的等号可以达到。只需要在纺织第 n 条直线时，使得其不予其他直线中的任何一条平行，且新的直线不经过任何已经存在的交点。于是，披萨递归式演变为：

$$L_n = L_{n-1} + n, n > 0 \tag{3.2}$$

对于该递归式，我们需要一个闭式的解（关于什么样的解才是闭式解，请参考《具体数学》第6页的部分论述，此处省略若干字）。通过把披萨递归式展开，我们发现：

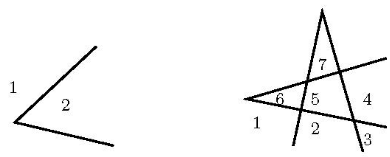
$$
\begin{aligned}
L_n &= L_{n-1} + n && (3.3)\\
&= L_{n-2} + (n-1) + n && (3.4)\\
&= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n && (3.5)\\
&\vdots \vdots && (3.6)\\
&= L_0 + 1 + 2 + \ldots + n && (3.7)\\
& && (3.8)
\end{aligned}
$$

显然：

$$L_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}, n > 0 \tag{3.9}$$

4 拓展1：锯齿刀

现在考虑切割披萨问题的一个变形。假设我们用折线代替直线，每一条折现包含一个锯齿，就像等腰三角形去掉底一样。如下图所示，平面上由 n 条这样的折线所界定的区域数 Z_n 最多是多少？



$Z_1 = 2$ $Z_2 = 7$

图 2: 折形曲线划分平面

从上图的小规模实现可以发现，除了两条直线不经过它们的交点延伸出去外，一条折线和两条直线相同：

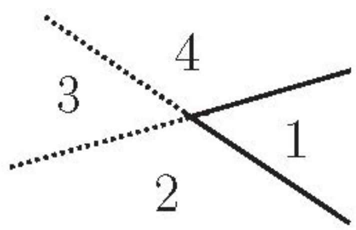


图 3: 一条折线和两条直线

区域2,3,4对于两条直线来说是不同的区域，但是在一条折线的情况下是单独的一个区域，于是一条折线相对于两条直线减少了两个区域。如果每条折线的顶点都位于它与其他直线交点之外，每一条折线损失两个区域是固定不变的，于是有：

$$Z_n = L_{2n} - 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} + 1 - 2n = 2n^2 - n + 1, n \geq 0 \tag{4.1}$$

相比较而言，如果 n 足够大，则 L_n和 Z_n 有如下关系：

$$L_n \sim \frac{1}{2}n^2 \tag{4.2}$$
$$Z_n \sim 2n^2 \tag{4.3}$$

即，有当 $n \to \infty$，$Z_n = 4L_n$

5 拓展2：Z形刀

假设有 n 条Z行曲线所定义的区域最大个数是多少？如图所示。每条Z行线由两条平行的无线半直线和一条直线段组成。

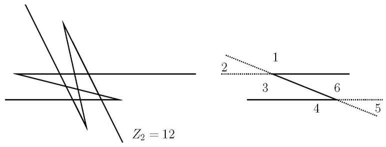


图 4: 一条折线和两条直线

如图所示，分析知：一条Z线划分生成的区域相当于三条曲线，只是Z形曲线划分的区域比三条曲线要少了5个，其中四个区域是因为直线的不完整造成的，一个区域是因为Z型曲线的两条平行线造成的。所以:

$$Z_n = L_{3n} - 5n = \frac{3n(3n+1)}{2} + 1 - 5n = \frac{9n^2}{2} - \frac{7n}{2} + 1$$

6 拓展3: 三维奶酪问题

在一块后奶酪上画出五道直的刀痕，可以得到多少块奶酪?（在划奶酪时，奶酪必须保持在它原来的位置上，且每道切痕必定与三维空间中的一个平面相对应。）求 P_n 的一个递归关系，这里 P_n 表示 n 个不同的平面所能定义的三维区域的最大个数。