练习：不变子空间

张朝龙

目录

1 5.A.1

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$，并设U是V的子空间

1. 证明：若$U \subset \operatorname{null} T$，则$U$在$T$下不变。
2. 证明：若$\operatorname{range} T \subset U$，则$U$在$T$下不变。

解答： 1. $\forall u\in U$，$Tu=0$，因为U是V的子空间，所以$0\in U$，所以$Tu\in U$，所以U在T下不变

2. $\forall uinU$，$Tu\in \text{range}T$。因为$\text{range}T\subset U$，所以$Tu\in U$，即U在T下不变。

2 5.A.2

问题 设$S,T\in\mathcal{L}(V)$使得$ST=TS$，证明$\text{null}S$在T下不变。

解答： $\forall u\in\text{null}S$，则对$ST=TS$两边作用于u，有$STu=TSu=T(0)=0$，显然有$Tu\in\text{null}S$。

3 5.A.3

问题 设$S,T\in\mathcal{L}(V)$，使得$ST=TS$，证明$\text{range}S$在T下不变。

解答： 设$v\in\text{range}S$，则$\exists u$，使得$Su=v$，所以$STu=TSu=Tv$，即$Tv\in\text{range}S$

4 5.A.4

问题 设$T\in\mathcal{L}(V)$且$U_1,\ldots,U_m$是V的在T下不变的子空间。证明$U_1+\ldots+U_m$在T下不变。

解答： 假设$\forall u\in U_1+\ldots+U_m$，则$\exists u_1\in U_1,\ldots,u_m\in U_m$，有$u=u_1+\ldots+u_m$。$Tu=T(u_1+\ldots u_m)=Tu_1+\ldots+Tu_m$。

因为$Tu_1\in U_1,\ldots,Tu_m\in U_m$，所以$Tu_1+\ldots+Tu_m\in Tu$

5 5.A.5

问题 设$T\in\mathcal{L}(V)$，证明V的任意的一组在T下不变的子空间的交仍在T下不变。

解答： 假设$U_1,\ldots,U_m$是T下的一组不变子空间，则对于$U=U_1\cap\ldots\cap U_m$，假设$u\in U$,则$u\in U_1,\ldots,u\in U_m$，所以$Tu\in U_1,\ldots,Tu\in U_m$，即$Tu\in U_1\cap\ldots\cap U_m$

6 5.A.6

问题 证明或给出反例：若V是有限维的，U是V的子空间且在V的每个算子下不变，则$U=\{0\}$或者$U=V$

解答: 我们用反证法证明这个命题是真命题。假设U是V的子空间，$U\neq 0$且$U\neq V$，那么存在$T\in\mathcal{L}(V)$满足U在T下不是不变的。

假设U是V的子空间，$U\neq 0$且$U\neq V$，对于$u\in U$且$u\neq 0$和$w\in V,w\notin U$，扩展u为V的一个基$(u,v_1,\ldots,v_n)$,定义：

$$T(au+b_1v_1+\ldots+v_nv_n)=aw$$

因此$Tu=w$。因为$u\in U$但是$w\notin U$，这表明U在T下不是不变的。

7 5.A.7

问题 定义$T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$为$T(x,y)=(-3y,x)$,求$T$的本征值

解答: 回忆一下本征值的定义。称数$\lambda\in\mathbf{F}$为T的本征值，若存在$v\in V$使得$v\neq 0$且$Tv=\lambda v$

我们假设λ是本征值，则有$(-3y,x)=\lambda(x,y)$，所以：

$$-3y=\lambda x \tag{7.1}$$

$$x=\lambda y \tag{7.2}$$

所以:

$$-3y=\lambda^2 y \tag{7.3}$$

所以$\lambda^2=-3$，这是不可能的。因为$T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$。

8 5.A.8

问题 定义$T\in\mathcal{L}(\mathbf{F}^2)$为$T(w,z)=(z,w)$,求$T$的所有本征值和本证向量。

解答: 根据本征值的定义。

$$(z,w)=\lambda(w,z) \tag{8.1}$$

$$\tag{8.2}$$

所以$\lambda=\pm1$。当$\lambda=1$时，特征向量是(w,w)；当$\lambda=-1$时，特征向量是$(w,-w)$

9 5.A.9

问题 定义$T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^3)$为$T(z_1, z_2, z_3) = (2z_2, 0, 5z_3)$，求$T$的所有本征值和本证向量。

解答: 根据本征值的定义。

$$\lambda(z_1, z_2, z_3) = (2z_2, 0, 5z_3)$$

$$\lambda z_1 = 2z_2 \tag{9.1}$$

$$\lambda z_2 = 0 \tag{9.2}$$

$$\lambda z_3 = 5z_3 \tag{9.3}$$

所以当$\lambda \neq 0$我们可以得到:

$$\lambda = 5 \tag{9.4}$$

$$z_2 = 0 \tag{9.5}$$

$$z_1 = 0 \tag{9.6}$$

$$\tag{9.7}$$

z_3是个自由变量，所以特征值是5，特征向量是$(0, 0, z_3)$

当$\lambda = 0$，我们可以得到：

$$z_2 = 0 \tag{9.8}$$

$$z_3 = 0 \tag{9.9}$$

$$\tag{9.10}$$

z_1是个自由变量，所以特征值0对应的特征向量是$(z_1, 0, 0)$

10 5.A.10

问题 定义$T \in \mathbf{F}^n$为$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n)$

1. 求T的所有本征值和本证向量。

2. 求T的所有不变子空间。

解答: *1.* 根据特征值的定义有：

$$x_1 = \lambda x_1 \tag{10.1}$$

$$x_2 = \lambda x_2 \tag{10.2}$$

$$\vdots = \vdots \tag{10.3}$$

$$x_n = \lambda x_n \tag{10.4}$$

当$\lambda = 0$时，有$(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$，所以0不是$T$的特征值。当$\lambda = 1$时，我们有$(x_1 \neq 0, 0, 0, \ldots, 0)$是$T$的特征向量，当$\lambda = 2$时，我们有$(0, x_2 \neq 0, 0, 0, \ldots, 0)$是$T$的特征向量，依次类推,$\lambda = n$时，有$(0, 0, \ldots, x_n \neq 0)$是$T$的特征向量。

1. 关于T的不变子空间，我们有n个特征向量对应的一维子空间肯定是T的不变子空间。

11 5.A.11

问题 定义$T : \mathcal{P}(\mathbf{R}) \to \mathcal{P}(\mathbf{R})$为$Tp = p^{'}$，求$T$的所有本征值和本证向量。

解答: 本征值是对于$T \in \mathcal{L}(V)$，存在λ，对于非零的v，有$Tv = \lambda v$。这个λ是本征值,v是对应的本证向量。

$\mathcal{L}(\mathbf{R})$是实数域上的多项式，则根据本征值的定义有$\lambda \in \mathbf{R}$，且$p \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$使得：

$$\lambda p = p^{'} \tag{11.1}$$

这个式子说明本证向量是$\mathcal{P}(\mathbf{R})$上的多项式，且满足其导数等于其本身的λ倍。指数函数具有这个性质，但是指数函数不是实数多项式。头疼，到底有没有本征值和本证多项式呢？如果$\lambda = 0$呢？ $\lambda p = 0$，又因为所有的常数导数都是零。所以$\lambda = 0$，常数多项式是一对本征值和本证多项式。

一般情况下 $\deg p^{'} < \deg p$，如果$\lambda \neq 0$，有$\deg \lambda q > \deg q^{'}$，矛盾。

12 5.A.12

问题 定义$T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4(\mathbf{R}))$如下：对所有$x \in \mathbf{R}$有$(Tp)(x) = xp^{'}(x)$，求$T$的所有本征值和本证向量。

解答: 设有本征值为λ，则有：

$$\lambda p(x) = xp^{'}(x) \tag{12.1}$$

我们知道$p^{'}(x)$比$p(x)$要低一个幂级，然后$xp^{'}(x)$又把幂提高一级，所以λ可以不是零。

对于$p(x) = x^n$，$p^{'}(x) = nx^{n-1}$，所以$xp^{'}(x) = nx^n$.

定义$q = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$，所以：

$$\lambda q = Tq = xq^{'}$$

即，

$$\lambda a_n x^n + \ldots + \lambda a_1 x + \lambda a_0 = na_n x^n + \ldots + 2a_2 x^2 + a_1 x \tag{12.2}$$

因为$a_n \neq 0$，如果只考虑第一项，我们有$\lambda = n$,然后$a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$，因此$q = a_n x^n$ 所以T的特征值是$0, 1, \ldots$，各自对应的特征向量是$\alpha x^n, \alpha \in \mathbf{R}$

13 5.A.13

问题 设V是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V)$且$\lambda \in \mathbf{F}$，证明存在$\alpha \in \mathbf{F}$使得$|\alpha - \lambda| < \frac{1}{1000}$ 且$(T - \alpha I)$是可逆的。

解答: 接触到这个题目，我拥有什么信息？ λ不一定是特征值。这个题目有点奇怪。假设：

$$|\alpha - \lambda| = \frac{1}{1000 + i}, i = 1, 2, \ldots, \dim V + 1 \tag{13.1}$$

又因为V至多有$\dim V$个特征值。多以在式 *(13.1)*中一定有一个i使得α_i不是T的特征值。

没有看出来这个题目有什么玄机。

14 5.A.14

问题 设$V = U \oplus W$，其中U和W均为V的非零子空间。定义$P \in \mathcal{L}(V)$如下：对$u \in U$和$w \in W$有$P(u + w) = u$，求P的所有本征值和本证向量。

解答: 根据本征值定义，

$$\lambda(u + w) = u$$

所以有：

$$(\lambda-1)u+\lambda w=0$$

因为$V=U\oplus W$所以必须有$(\lambda-1)u=\lambda w=0$

1. 当$u\neq 0$时，$\lambda=1,w=0$，对应的特征向量是$u\in U,u\neq 0$.

2. 当$w\neq 0$时，$\lambda=0$,，此时$u=0$。对应的特征向量是$w\in W$

15 5.A.15

问题 设$T\in\mathcal{L}(V)$，设$S\in\mathcal{L}(V)$是可逆的。

1. 证明T和$S^{-1}TS$有相同的本征值。

2. T的本证向量与$S^{-1}TS$的本证向量之间有什么关系？

解答： 对于第一个问题。假设T有特征值λ且λ对应的特征向量是v。因为S是可逆的，所以$\exists u\in V$，使得$Su=v$。

所以

$$Tv=\lambda v$$

，可以变成

$$T(Su)=\lambda(Su)$$

即

$$S^{-1}TSu=\lambda u$$

我们看到$S^{-1}TS$和T具有相同的特征值，但是特征向量不同。

对于第二个问题：我们在做第一个问题的时候就发现$Su=v$，T的特征向量v和$S^{-1}TS$的特征向量u之间存在$Su=v$的关系。

16 5.A.16

问题 设V是复向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$，T关于V的某个基的矩阵的元素均为实数。证明：若λ是T的本征值，则$\bar{\lambda}$也是T的本征值。

解答： 不晓得我哪个知识点又欠缺了？这个问题不能顺利解决。

尽管这个命题在无穷维向量空间下也是真的。这里我们暂且只考虑有限维的情景。假设T相对于基$e_1,\ldots,e_n$的矩阵中所有元素都是实数，那么：

$$Te_j=\sum_{i=1}^{n}A_{i,k}e_i$$

其中，$A_{i,j}\in\mathbf{R}$，现在假设$v\in V$且可以表示为：

$$v=k_1e_1+\ldots+k_ne_n$$

是T的一个特征向量，对应的特征值是λ。

$$Tv=\lambda v$$

展开得到：

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}k_ie_i=\sum_{i=1}^{n}k_iTe_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_iA_{j,i}e_j$$

对上式取共轭：

$$\bar{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\bar{k_i}e_i=\sum_{i=1}^{n}\bar{k_i}Te_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{k_i}A_{j,i}e_j$$

上式意味着：$T(\bar{k_1}e_1+\ldots+\bar{k_n}e_n)=\bar{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\bar{k_i}e_i$ 即λ也是T的特征值。

注意上面证明过程中有个共轭的操作。

17　5.A.17

问题　给出一个没有(实)本征值的算子$T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^4)$

解答：　我们在例5.8中有一个$T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$上没有实本征值的算子$T(w,z)=(-z,w)$，扩展该算子，有：

$$T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^4),T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-x_2,x_1,-x_4,x_3)$$

这个问题的关键在于根据$Tu=\lambda u$，找到一个λ^2是负数的方程。还是要根据定义来。

18　5.A.18

问题　定义$T\in\mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty)$ 为$T(z_1,z_2,\ldots)=(0,z_1,z_2,\ldots,)$，证明$T$没有本征值

解答: 根据本征值的定义，假设有本征值λ:

$$\lambda(0, z_1, z_2, \ldots) = (z_1, z_2, \ldots,)$$

显然有:

$$\begin{aligned} \lambda 0 &= z_1 \quad (18.1) \\ \lambda z_1 &= z_2 \quad (18.2) \\ &\vdots \quad (18.3) \end{aligned}$$

无论λ是否为零，都有$0 = z_1 = z_2 = \ldots$

而特征向量不能为零。因此不存在特征值λ。

19 5.A.19

问题 设n是正整数，定义$T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^n)$为$T(x_1, \ldots, x_n) = (x_1+\ldots+x_n, \ldots, x_1+\ldots+x_n)$ 也就是说算子T对于标准基的矩阵的元素全是1，求T的所有本征值和本证向量。

解答: 利用特征值的定义，$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (x_1+\ldots+x_n, \ldots, x_1+\ldots+x_n)$，则有:

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= x_1 + \ldots + x_n \quad (19.1) \\ \lambda x_2 &= x_1 + \ldots + x_n \quad (19.2) \\ &\vdots \quad (19.3) \\ \lambda x_n &= x_1 + \ldots + x_n \quad (19.4) \end{aligned}$$

把上面n个式子相加，则有$\lambda = n$，此时$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$。所以特征值为$\lambda = n$，特征向量是$(x, \ldots, x), x \in \mathbf{F}$

当$\lambda = 0$时，所有满足$x_1 + \ldots + x_n = 0$的$(x_1, \ldots, x_n)$都是0对应的特征向量。

20 5.A.20

问题 定义向后移位算子$T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^\infty)$ 为$T(z_1, z_2, z_3, \ldots) = (z_2, z_3, z_4, \ldots)$求$T$的特征向量和特征值。

解答: 根据特征值定义:

$$z_2 = \lambda z_1 \tag{20.1}$$
$$z_3 = \lambda z_2 = \lambda^2 z_1 \tag{20.2}$$
$$\vdots \tag{20.3}$$

因此任何$\lambda \in \mathbf{F}$都是T的特征值，其对应的特征向量是$\{(w, \lambda w, \lambda^2 w, \ldots) : w \in \mathbf{F}\}$

我们看到这个映射T对应的特征值有无穷多个，每个特征值对应的特征向量有无穷多个。

21 5.A.21

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$是可逆的:

1. 设$\lambda \in \mathbf{F}, \lambda \neq 0$, 证明$\lambda$是$T$的本征值当且仅当$\frac{1}{\lambda}$是$T^{-1}$的本征值。
2. 证明T和T^{-1}有相同的本证向量。

解答:

1. 据本征值的定义，假设λ是T的本征值，v是对应的特征向量，则

$$Tv = \lambda v$$

对两边乘以T^{-1}，则:

$$v = \lambda T^{-1} v$$

进而有:

$$T^{-1} v = \frac{1}{\lambda}$$

值得注意的是λ不可能是零，因为$\lambda = 0$则$\lambda v = 0$，则$Tv = 0$，因为T是可逆的，所以$v = 0$，特征向量不能为零，矛盾。

2. 该命题的证明已经包含于命题*1.* 这个命题十个非常重要的结论。在以后会经常用到。

22 5.A.22

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$且存在V中的非零向量v和w使得$Tv = 3w$，且$Tw = 3v$，证明3或者-3是T的特征值。

解答: 因为：

$$Tv = 3w \tag{22.1}$$

$$Tw = 3v \tag{22.2}$$

两式相加：

$$T(v+w) = 3(w+v)$$

两式相减：$T(v-w) = 3(w-v) = -3(v-w)$ 当$v=w$时，3是T的特征值，对应的特征向量为$2v$。当$v=-w$时，-3是T的特征值，对应的特征向量是$-2w$。当$v \neq w, v \neq -w$时，3和-3都是T的特征值，对应的特征向量是$v+w$和$v-w$

23 5.A.23

问题 设V是有限维的，且$S, T \in \mathcal{L}(V)$。证明ST和TS有相同的本征值。

解答: 假设α是ST的特征值，对应的特征向量是u;我们要证明λ是TS的特征值。

$$\begin{aligned}(TS)(Tu) &= T(ST)u && (23.1)\\ &= T(\lambda u) && (23.2)\\ &= \lambda(Tu) && (23.3)\end{aligned}$$

当$Tu \neq 0$时，Tu就是TS的特征值。

当$Tu = 0$，那么$\lambda = 0$ (因为$STu = \lambda u$)，所以T不是可逆的，继而TS也不是可逆的。TS不是可逆的，就有$u \in V$使得$TSu = 0 = 0u$，即0是TS的特征值。

我们有不管Tu是否为零，λ都是其TS特征值。

24 5.A.24

问题 设A是元素属于$\mathbf{F}$的$n \times n$矩阵。定义$T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^n)$为$Tx = Ax$，这里$\mathbf{F}^n$中的元素视为$n \times 1$的列向量。

1. 设A的每行元素之和都是*1*，证明1是T的本征值。

2. 设A的每列元素之和都是*1*，证明1是T的本征值。

解答： 因为$Tx = Ax$；

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} \tag{24.1}$$

注意到当$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$时，有：

$$Ax = x \tag{24.2}$$

即1是T的本征值。我们可以看到针对特征值1，T有特征向量

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n : x_1 = x_2 = \ldots = x_n \neq 0)\}$$

解答： 对于第二个问题：我们有：

$$(T - I)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i - x_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i - x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{24.3}$$

显然$T - I$的值域不是$\mathbf{F}^n$，因此$T - I$不是双射，即$T - I$不是单射，所以存在$u \in \mathrm{null}(T - I), u \neq \mathbf{0}$，使得：

$$(T - I)u = 0$$

25 5.A.25

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$且u和v均为T的本证向量使得$u + v$也是T的本证向量。证明u和v是T的同一本征值的本证向量。

解答： 根据*5.10*，不同本征值的特征向量是线性无关的，很容易可以证明。

26 5.A.26

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$使得V中的每个非零向量都是T的本征向量。证明T是恒等算子的标量倍。

解答： 如果$\forall v \in V, \exists a_v \in \mathbf{F}, \text{s.t.} \quad Tv = a_v v$。因为$T0 = 0$，我们可以选$a_0$为任意的数。对于$v \in V \backslash \{0\}$ 我们证明a_v由$Tv = a_v v$唯一确定。

为了证明T是恒等算子的标量倍，我们必须证明对于所有的$v \in V\backslash\{0\}$，a_v不变的。特别的，假设$v, w \in V\backslash\{0\}$，我们证明$a_v = a_w$首先考虑$v, w$线性相关，那么$\exists\, b, \text{s.t.} \quad w = bv$，所以：

$$\begin{aligned} a_w w &= Tw && (26.1)\\ &= Tbv && (26.2)\\ &= bTv && (26.3)\\ &= ba_v v && (26.4)\\ &= a_v b_v && (26.5)\\ &= a_v w && (26.6) \end{aligned}$$

所以$a_v = a_w$

另外考虑v, w是线性独立的，则：

$$\begin{aligned} a_{v+w}(v+w) &= T(v+w) && (26.7)\\ &= a_v v + a_w w && (26.8) \end{aligned}$$

这意味着：$(a_{v+w} - a_v)v + (a_{v+w} - a_w)w = 0$

$$\begin{aligned} a_{v+w} &= a_v && (26.9)\\ a_{v+w} &= a_w && (26.10) \end{aligned}$$

即$a_v = a_w$.

综上，命题得证。

27 5.A.27

问题 设V是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V)$使得V的每个$\dim V - 1$维子空间都在T下不变。证明T是恒等算子的标量倍。

解答: 利用上题的结论，假设T不是恒等算子的标量倍，则一定存在u不是T的特征向量，则Tu和u是线性独立的。我们把u, Tu扩展为V的一个基，$(u, Tu, v_1, \ldots, v_n)$，令

$$U = \text{span}(u, u_1, \ldots, u_n)$$

显然,$\dim U = \dim V - 1$。我们可以看到U在T下不是不变的因为$Tu \notin U$。矛盾。因此T一定是恒等算子的标量倍。

28 5.A.28

问题 设V是有限维的，$\dim V \geq 3$且$T \in \mathcal{L}(V)$使得V的每个二维子空间都在T下不变。证明T是恒等算子的标量倍。

解答：

29 5.A.29

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$且$\dim \operatorname{range}(T) = k$，证明$T$至多有$k+1$个不同的特征值。

解答：

$$\dim V = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T$$

假设$\operatorname{null} T \neq \{0\}$，$\exists u \in \operatorname{null} T, u \neq 0, \text{s.t.} \quad Tu = 0$,则0是$T$的一个特征值.

假设T有m个互不相同的特征值,$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，并且$v_1, \ldots, v_m$是这些特征值对应的特征向量。则有如果$\lambda_i \neq 0$，则：

$$T(v_j/\lambda_j) = v_j \tag{29.1}$$

因为λ_j中最多有一个为0，这个零是我们之前做的假设导致的。那么也就是说λ_j中至少有$m-1$个向量在$\operatorname{range}(T)$中。这些向量是线性无关的，则：

$$m - 1 \leq \dim \operatorname{range}(T) = k \tag{29.2}$$

因此$m \leq k+1$，证闭。

30 5.A.30

问题 设$T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$，且$4, 5, \sqrt{7}$是$T$的本征值，证明存在$x \in \mathbf{R}^3$使得$Tx - 9x = (4, 5, \sqrt{7})$

解答： 已知,$\dim \mathbf{R}^3 = 3$，且T有三个互不相同的特征值，则其对应的特征向量是线性无关的。这说明9肯定不是T的特征值。因此$T - 9I$是满射。因此$\exists x \in \mathbf{R}^3, \text{s.t.} \quad (T-9I)x = (4, 5, \sqrt{7})$，即$Tx - 9x = (4, 5, \sqrt{7})$

31 5.A.31

问题 设V是有限维的且$v_1, \ldots, v_m$是V中的一组向量。证明$v_1, \ldots, v_m$线性无关当且仅当存在$T \in \mathcal{L}(V)$，使得$v_1, \ldots, v_m$是T的相应于不同特征值的特征向量。

解答: 首先，我们知道假设$v_1, \ldots, v_m$是$T \in \mathcal{L}(V)$的相应于不同特征值的特征向量，则$v_1, \ldots, v_m$是线性无关的。

然后我们证明另外一个方面。假设$v_1, \ldots, v_m$是线性无关的，则$v_1, \ldots, v_m$可以扩展为V的一组基$v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$，定义$T \in \mathcal{L}(V)$为:

$$Tv_i = iv_i, i = 1, \ldots, n \tag{31.1}$$

因此,$v_1, \ldots, v_n$是T的对应于$1, \ldots, n$的特征向量。

32 5.A.32

问题 设$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$是一组互异实数。证明在由$\mathbf{R}$上的实值函数构成的向量空间中，组$e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$线性无关。

解答: 定义:

$$Tf = f^{'}$$

则有:

$$Te^{\lambda_i x} = \lambda_i e^{\lambda_i x}$$

因此λ_i是T的对应于$e^{\lambda_i x}$的特征值。因为λ_i各不相同，所以$e^{\lambda_i x}, \forall i$是线性独立的。