不变子空间

张朝龙

目录

1 回忆

算子 是从一个向量空间到自身的线性映射。V上的算子集合记为$\mathcal{L}(V)$。为了更好的理解算子，假设$T \in \mathcal{L}(V)$，如果V有直和分解：

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$$

其中$U_j, j \in \{1, \ldots, m\}$是$V$的真子空间，那么，如果想要了解$T$的特性，我们只需要了解每个$T|_{U_j}$的特性就可以了。这里$T|_{U_j}$表示把$T$限制到更小的定义域$U_j$上。因为$U_j$是比$V$更小的向量空间，所以处理$T|_{U_j}$应该比$T$更容易。

但是这里有个问题：$T|_{U_j}$是U_j上的算子么？显然，不一定的。那么为了进一步简化分析，我们只考虑那些T能够把U_j映射到U_j的直和分解，即在这样的直和分解结果中$T|_{U_j}$依然是U_j上的算子。

2 被算子映射到自身的子空间

被算子映射到自身的子空间非常重要。因此我们赋予它一个名字：

定义 *2.1* 设$T \in \mathcal{L}(V)$，称V的子空间U在T下不变，如果对于每个$u \in U$都有$Tu \in U$

例 *2.1* 设$T \in \mathcal{L}(V)$，证明V的下列子空间在T下不变：

1. $\{0\}$
2. V
3. $nullT$
4. $rangeT$

证 1. 对于$\{0\}$中的元素0,$T(0) = 0 \in \{0\}$

2. 对于$V, \forall v \in V, T(v) \in V$，因为$T$是$V$上的算子。
3. 对于$nullT, \forall u \in nullT$， $Tu = 0 \in nullT$
4. 对于$rangeT$，$\forall u \in rangeT$，$Tu \in rangeT$ □

这四个空间是V的固有的四个不变子空间。

3 本征值与本证向量

不变子空间的研究可以非常深入，泛函分析中，最终名的尚未解决的问题叫做 **不变子空间问题** ，它研究无限维向量空间上算子的不变子空间。现在我们先研究最简单的非平凡不变子空间：一维不变子空间。

$\forall v \in V, v \neq 0$，并设$U$是$v$的标量倍构成的集合：

$$U = \{\lambda v : \lambda \in \mathbf{F}\} = span(v)$$

则，U是V的一维子空间。若U在算子$T \in \mathcal{L}(V)$下不变，则$Tv \in U$，因此必有标量$\lambda \in \mathbf{F}$使得$Tv = \lambda v$

另一方面，若有某个$\lambda \in \mathbf{F}$使得$Tv = \lambda v$，则$span(v)$是V的在T下不变的一维子空间。终于，我们现在见到了本征值和本证向量。这种引入方式不同于生硬的定义，深入浅出的谆谆善诱。在使用《linear algebra done right》这本书的时候，恨不得把自己的大脑格式化一遍，从新学习线性代数。之前学的东西忘不掉，又不成体系，只发挥了扰乱心智的作用。

定义 *3.1* 设$T \in \mathcal{L}(V)$，称数$\lambda \in \mathbf{F}$为T的本征值，若存在$v \in V, v \neq 0$，使得$Tv = \lambda v$

小插曲：**eigenvalue** 这个词一半是德文，一半是英文。德文形容词 **eigen** 的意思是“特有的”。有些数学家使用特征值而不是本征值。我学线性代数的时候使用特征值这种说法。

本征值的等价条件：设V是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V)$，且$\lambda \in \mathbf{F}$，I是恒等映射，则以下条件等价：

1. λ是T的本征值；
2. $T - \lambda I$不是单的；
3. $T - \lambda I$不是满的；
4. $T - \lambda I$不是可逆的。

我们之前就证明过一个命题：对于有限维空间，现行算子的单性，满性和可逆性是等价的, 见这里 。

定义 *3.2* 设$T \in \mathcal{L}(V)$，并设$\lambda \in \mathbf{F}$是T的本征值，称向量$v \in V$为T的相应于λ的本徵向量，如果$v \neq 0$且$Tv = \lambda v$

因为$Tv = \lambda v$当且仅当$(T - \lambda I)v = 0$，说明$v \in null(T - \lambda I)$

定理 *3.1* 设$T \in \mathcal{L}(V)$，设$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$是$T$的互不相同的本征值，并设$v_1, \ldots, v_m$是相应的本证向量，则$v_1, \ldots, v_m$是线性无关的。

证 采用反证法。设$v_1, \ldots, v_m$是线性相关的，我们希望能够推出矛盾。假设k是满足$k \in span(v_1, \ldots, v_{k-1})$成立的最小正整数。根据线性相关引理，这个正整数是存在的，并且$v_1, \ldots, v_{k-1}$是线性无关的（因为任何小于k的数都不能是$v_k \in span(v_1, \ldots, v_{k-1})$，根据线性无关的定义，我们知道$v_1, \ldots, v_{k-1}$是线性无关的）。

因为$v_k \in span(v_1, \ldots, v_{k-1})$，所以

$$\exists a_1, \ldots, a_{k-1}, \quad v_k = a_1 v_1 + \ldots + a_{k-1} v_{k-1}$$

我们对上式分别做两个操作：

1. 乘以λ_k

2. 执行T映射

我们会得到两个式子：

$$\lambda_k v_k = \lambda_k a_1 v_1 + \ldots + \lambda_k a_{k-1} v_{k-1} \tag{3.1}$$

$$\lambda_k v_k = \lambda_1 a_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1} a_{k-1} v_{k-1} \tag{3.2}$$

两式相减则有：

$$0 = a_1(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + \ldots + a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1} \tag{3.3}$$

因为$v_1, \ldots, v_{k-1}$是线性无关的，所以：

$$\begin{aligned} a_1(\lambda_k - \lambda_1) &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ a_1(\lambda_k - \lambda_{k-1}) &= 0 \end{aligned}$$

因为λ_k不与$\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$中的任何一个相等，所以$a_j = 0, \forall j$。所以$v_k = 0$这与$v_k$是本证向量的假设矛盾。

所以$v_1, \ldots, v_m$都是线性无关的。 □

这个定理的证明依赖于线性相关性引理，现在把这个引理复数如下：

定理 *3.2* 设$v_1, \ldots, v_m$是V中的一个线性相关的向量组，则有$j \in \{1, \ldots, m\}$使得：

1. $v_j \in span(v_1, \ldots, v_{j-1})$
2. 若从$v_1, \ldots, v_m$中去掉第j项，则剩余组的张成空间等于$span(v_1, \ldots, v_m)$

结合线性相关性引理的两个步骤，我们可以迭代的找到那个使得$v_1, \ldots, v_j$线性无关的k，即$v_1, \ldots, v_k$是线性无关的，但是$v_1, \ldots, v_{k+1}$是线性相关的，且$v_{k+1} \in span(v_1, \ldots, v_k)$。

定理 *3.3* 设V是有限维的，则V上的每个算子最多有$\dim V$个互不相同的本征值。

证 设$T \in \mathcal{L}(V)$，设$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$是$T$的互不相同的本征值，$v_1, \ldots, v_m$是相应的本证向量。由于$v_1, \ldots, v_m$是线性无关的，所以$m \leq \dim V$。一个向量空间中的线性无关组的长度小于这个向量的基中向量组的长度。 □

4 限制算子与商算子

若$T \in \mathcal{L}(V)$且U是V的在T下不变的子空间，则U默认定了另外两个算子$T|_U \in \mathcal{L}(U)$，和$T/U \in \mathcal{L}(V/U)$，其定义为：

定义 *4.1* 设$T \in \mathcal{L}(V)$，且U是V的在T下不变的子空间。

1. 限制算子 $T|_U \in \mathcal{L}(U)$的定义为：

$$\forall u \in U, T|_U(u) = Tu$$

2. 商算子$T/U \in \mathcal{L}(V/U)$定义为：$\forall v \in V, (T/U)(v+U) = Tv+U$

首先考虑限制算子$T|_U \in \mathcal{L}(U)$这个算子之所以叫限制算子，是因为这个算子把映射的定义域限制在U上。并且$T|_U$是把U上的元素映射到U上而不是V上。

对于商算子，我们需要验证$v+U = w+U$，则$Tv+U = Tw+U$。现在设$v+U = w+U$，则$v-w \in U$。由于U在T下不变，则$T(v-w) \in U$，即$Tv-Tw \in U$，所以$Tv+U = Tw+U$。

设T是有限维向量空间V上的算子，且U是V在T不变的子空间使得$U \neq \{0\}$且$U \neq V$。在某种意义下，可以通过研究算子$T|_U$和T/U来了解算子T，而$T|_U$和T/U都是维数小于V维数的向量空间上的算子。但是，有时候$T|_U$和T/U并没有给出关于T的足够信息。在下面的例子中，$T|_U$和T/U都是0，即便T不是0算子。

例 *4.1* 定义算子$T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^2)$为$T(x,y) = (y,0)$，设$U = \{(x,0) : x \in \mathbf{F}\}$。证明：

1. U在T下不变。且$T|_U$是U上的0算子。
2. 不存在$\mathbf{F}^2$的在T下不变的子空间W使得$\mathbf{F}^2 = U \oplus W$
3. T/U是$\mathbf{F}^2/U$上的0算子

证 1. 对于$(x,0) \in U$，我们有$T(x,0) = (0,0) \in U$,所以$T|_U$在U下不变，且$T|_U$是U的0算子。

2. 设W是V的子空间使得$\mathbf{F}^2 = U \oplus W$，由于$\dim \mathbf{F}^2 = 2$且$\dim U = 1$,我们有$\dim W = 1$。若$W$在$T$下不变，则$W$的每个非零向量都是$T$的本证向量。然而$T$的唯一本征值是0，且$T$的所有本证向量都在$U$中。于是$W$并非在$T$下不变。

3. 对于$(x,y) \in \mathbf{F}^2$，我们有：

$$(T/U)((x,y)+U) = T(x,y)+U = (y,0)+U = U$$

因为$U \in V/U$，且是V/U里的单位元，所以T/U是0算子。 □