正交补与极小化问题

目录

1 正交补

定义 *1.1* 设U是V的子集，则U的正交补(记为$U^{\perp}$)是由V中与U的每个向量都正交的那些向量组成的集合：

$$U^{\perp} = \{v \in V : \forall\, u \in U, \langle v, u\rangle = 0\} \tag{1.1}$$

若U是$\mathbf{R}^3$中的直线，则$U^{\perp}$是垂直于U且包含原点的平面。若U是$\mathbf{R}^3$中的平面，则$U^{\perp}$是垂直于U且包含原点的直线。

定理 *1.1* *1.* 若U是V的子集，则$U^{\perp}$是V的子空间。

2. $\{0\}^{\perp} = V$

3. $V^{\perp} = \{0\}$

4. 若U是V的子集，则$U \cap U^{\perp} = \{0\}$

5. 若U和W均为V的子集且$U \subset W$，则$W^{\perp} \subset U^{\perp}$

证 *1.* 设U是V的子集，则对每个$u \in U$均有$\langle 0, u\rangle = 0$，于是$0 \in U^{\perp}$. 设$v, w \in U^{\perp}$，若$u \in U$,则：

$$\langle v + w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle = 0$$

因此$v + w \in U^{\perp}$，所以在加法下$U^{\perp}$是封闭的。

类似的对于$v \in U^{\perp}$，有$\langle \lambda v, u\rangle = \lambda\langle v, u\rangle = 0$这说明$U^{\perp}$在标量乘法下是封闭的。

所以$U^{\perp}$是V的子空间。

1. $\forall v \in V$, 均有：$\langle v, 0\rangle = 0$ ，所以$\{0\}^{\perp} = V$
2. 假设$v \in V^{\perp}$，则$\langle v, v\rangle = 0$，则$v = 0$，所以$V^{\perp} = 0$
3. 假设$v \in U \cap U^{\perp}$，则有$\langle v, v\rangle = 0$，则$v = 0$，所以$U \cap U^{\perp} = \{0\}$
4. 设U, W均为V的子集，则对于$v \in W^{\perp}$，说明对于$\forall\ u \in W$，都有$\langle v, u\rangle = 0$，这表明对于每个$u \in U$，都有$\langle v, u\rangle = 0$，所以$v \in U^{\perp}$，所以有$W^{\perp} \subset U^{\perp}$ □

若U, W均为V的子空间，并且V中的每个元素都可以唯一的写成U中的一个向量与W中的一个向量的和，则V是U和W的直和，记为$V = U \oplus W$

定理 *1.2* 设U是V的有限维子空间，则$V = U \oplus U^{\perp}$

证 首先证明：

$$V = U + U^{\perp}$$

假设$v \in V$，并设$e_1, \ldots, e_m$是U的规范正交基，则：

$$v = \underbrace{\langle v, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle v, e_m\rangle e_m}_{u} + \underbrace{v - \langle v, e_1\rangle e_1 - \ldots - \langle v, e_m\rangle e_m}_{w} \tag{1.2}$$

显然$u \in U$，因为$e_1, \ldots, e_m$是U的一个规范正交基，所以对每个$j = 1, \ldots, m$均有：

$$\langle w, e_j\rangle = \langle v, e_j\rangle - \langle v, e_j\rangle = 0 \tag{1.3}$$

所以w正交于$\text{span}(e_1, \ldots, e_m)$中的每个向量。也就是说$w \in U^{\perp}$，于是$v = u + w$其中$u \in U, w \in U^{\perp}$ 另外因为$U \cap U^{\perp} = \{0\}$，所以

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

□

定理 *1.3* 设V是有限维的且U是V的子空间，则$\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$

定理 *1.4* U是V的有限维子空间，则$U = (U^{\perp})^{\perp}$

证 首先证明$U \subset (U^{\perp})^{\perp}$。设$u \in U$，则对每个$v \in U^{\perp}$，均有$\langle v, u\rangle = 0$.因为 u正交与$U^{\perp}$中的向量，所以$u \in (U^{\perp})^{\perp}$

然后我证明另一个方向。设$v \in (U^{\perp})^{\perp}$。设$v \in (U^{\perp})^{\perp}$令$v = u + w$，其中$u \in U$，且$w \in U^{\perp}$,从而$v - u = w \in U^{\perp}$。因为$v \in (U^{\perp})^{\perp}$且$u \in (U^{\perp})^{\perp}$，

所以$v-u\in(U^{\perp})^{\perp}$,所以$v-u\in U^{\perp}\cap(U^{\perp})^{\perp}$。这表明$v-u$与自身正交。从而$v-u=0$，即$v=u$，于是$v\in U$，因此$(U^{\perp})^{\perp}\subset U$ □

定义 *1.2* 设U是V的有限维子空间。定义V到U上的正交投影为如下算子$P_U\in\mathcal{L}(V)$：对$v\in V$，将其写成$v=u+w$，其中$u\in U,w\in U^{\perp}$，则$P_Uv=u$

直和分解$V=U\oplus U^{\perp}$表明每个$v\in V$可唯一的写成$v=u+w$，其中$u\in U$且$w\in U^{\perp}$，于是P_Uv定义合理。

例 *1.1* 设$x\in V$，$x\neq 0$且$U=\mathrm{span}(x)$，证明对每个$x\in V$均有：

$$P_Uv=\frac{\langle v,x\rangle}{\|x\|^2}x \tag{1.4}$$

已知$\forall\, v\in V$都可以写为：

$$v=\frac{\langle v,x\rangle}{\|x\|^2}x+(v-\frac{\langle v,x\rangle}{\|x\|^2}x) \tag{1.5}$$

上式第一项和第二项是互相垂直的。第一项属于$\mathrm{span}(x)$，第二项正交与x，从而第二项属于$U^{\perp}$。所以P_Uv等于上式右端第一项。

接下来给出几条正交投影P_U的性质：设U是V的有限维子空间且$v\in V$，则：

1. $P_U\in\mathcal{L}(V)$
2. $\forall\, u,P_Uu=u$
3. $\forall\, w\in U^{\perp},P_Uw=0$
4. $\mathrm{range}P_U=U$
5. $\mathrm{null}P_U=U^{\perp}$
6. $v-P_Uv\in U^{\perp}$
7. $(P_U)^2=P_U$
8. $\|(P_U)v\|\leq\|v\|$
9. 对U的每个规范正交基$e_1,\ldots,e_n$均有$P_Uv=\langle v,e_1\rangle e_1+\ldots+\langle v,e_m\rangle e_m$

证 为了证明P_U是V上的线性映射，设$v_1,v_2\in V$，设：

$$v_1=u_1+w_1,v_2=u_2+w_2 \tag{1.6}$$

其中$u_1,u_2\in U$,$w_1,w_2\in U^{\perp}$，则$P_Uv_1=u_1,P_Uv_2=u_2$，从而：

$$v_1+v_2=u_1+u_2+w_1+w_2$$

其中$u_1+u_2\in U$,且$w_1+w_2\in U^\perp$，所以$P_U(v_1+v_2)=u_1+u_2=P_Uv_1+P_Uv_2$类似的有，设$\lambda\in\mathbf{F}$，若$v=u+w$，其中$u\in U$且$w\in U^\perp$，则$\lambda v=\lambda u+\lambda w$，其中$\lambda u\in U,\lambda w\in U^\perp$,于是$P_U(\lambda v)=\lambda u=\lambda P_Uv$，因此$P_U$是$V$到$V$的线性映射。

$\square$

证 设$u\in U$，则$u=u+0$，则其中$u\in U,0\in U^\perp$，所以$P_Uu=u$ $\square$

证 设$w\in U^\perp$，则$w=0+w$，则其中$0\in U,w\in U^\perp$，所以$P_Uw=0$ $\square$

证 由P_U的定义可知$\mathrm{range}(P_U)\subset U$。由上面第二步可知$U\subset\mathrm{range}P_U$，于是$\mathrm{range}P_U=U$ $\square$

证 因为$U^\perp\subset\mathrm{null}P_U$。另外，$\forall\, v\in\mathrm{null}P_u$则$v=0+v$，其中$0\in U,v\in U^\perp$，因此$\mathrm{null}P_U\subset U^\perp$ $\square$

证 若$v=u+w$，其中$u\in U$，且$w\in U^\perp$，则：

$$v-P_Uv=v-u=w\in U^\perp$$

$\square$

证 若$v=u+w$，其中$u\in U$，且$w\in U^\perp$，则：

$$(P_U)^2v=P_U(P_Uv)=P_Uu=u=P_Uv \tag{1.7}$$

所以$P_U^2=P_U$ $\square$

证 若$v=u+w$，其中$u\in U$，且$w\in U^\perp$，则：

$$\|P_Uv\|^2=\|u\|^2\le\|u\|^2+\|w\|^2=\|v\|^2$$

$\square$

2 极小化问题

经常会遇到这样的问题：给定V的子空间U和点$v\in V$，求点$u\in U$使得$\|v-u\|$最小。通过正交投影可以完美解决这个问题。

定理 *2.1* 设U是V的最小子空间，$v\in V$，且$u\in U$，则：

$$\|v-P_Uv\|\le\|v-u\| \tag{2.1}$$

当且仅当$P_Uv=u$时等号成立。

证 我们有：

$$\|v-P_Uv\|^2\le\|v-P_Uv\|^2+\|P_Uv-u\|^2 = \|v-P_Uv+P_Uv-u\|^2 \tag{2.2}$$

$$=\|v-u\|^2 \tag{2.3}$$

上式的第一个不等号成立是因为$\|P_U v - u\|^2$是一个非负实数，第二个等号成立是因为勾股定理，第三个等式成立是简单的消元计算。把上式两端开平方即可。
□

上式的证明表明$P_U v$是U中离v最近的点。之前我们又有$P_U v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle v, e_m\rangle$，其中$e_1, \ldots, e_m$是$U$的规范正交基。