

# 随机变量函数的分布

zcl.space

## 目录

1 引子	1
2 几个例子	2
3 一般性的定理	3

## 1 引子

我们经常遇到这样的情形：已知某个随机变量的分布，但我们感兴趣的是该随机变量的函数的分布。例如，设随机变量 $X$ 的分布已知，欲求 $g(X)$ 的分布。为求 $g(X)$ 的分布，需要将事件 $g(X) \leq y$ 表示关于 $X$ 的集合。



## 2 几个例子

### 例 2.1

设随机变量  $X$  服从  $(0, 1)$  上的均匀分布，下面我们给出随机变量  $Y = X^n$  的分布。对于  $0 \leq y \leq 1$  有：

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} \quad (2.1)$$

$$= P\{X^n \leq y\} \quad (2.2)$$

$$= P\{X \leq y^{1/n}\} \quad (2.3)$$

$$= F_X(y^{1/n}) \quad (2.4)$$

$$= y^{1/n} \quad (2.5)$$

则  $Y$  的密度函数为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{others} \end{cases} \quad (2.6)$$

### 例 2.2

设  $X$  是一个连续性随机变量，密度函数为  $f_X$ ，则  $Y = X^2$  的分布可以通过以下方法得到：对于  $y \geq 0$ ，有：

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \quad (2.7)$$

求导可得：

$$f^Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] \quad (2.8)$$

**例 2.3**

设 $X$ 有密度函数 $f_X$ ，则 $Y = |X|$ 的密度函数可以如下得到，对于 $y \geq 0$ ，有：

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{|X| \leq y\} = P\{-y \leq X \leq y\} = F_X(y) - F_X(-y) \quad (2.9)$$

求导可得：

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y), y \geq 0 \quad (2.10)$$

**3 一般性的定理****定理 3.1**

设 $X$ 为连续随机变量，密度函数为 $f_X$ ，设 $g(x)$ 为一严格单调（递增或递减）且可微的函数，那么随机变量 $Y = g(X)$ 的密度函数为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)] \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| & \text{if } \exists x, \text{ s.t. } y = g(x) \\ 0 & \forall x, y \neq g(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

**证明 3.1**

设对某些 $x$ ，有 $y = g(x)$ ，那么，若令 $Y = g(X)$ ，则有：

$$F_Y(y) = P\{g(X) \leq y\} = P\{X \leq g^{-1}(y)\} = F_X(g^{-1}(y)) \quad (3.2)$$

求导可得：

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \quad (3.3)$$

因为 $g^{-1}(y)$ 单调非降，所以导数非负。若 $g^{-1}(y)$ 单调非增则导数为负值。若对于任意 $x$ 都有 $y \neq g(x)$ ，那么 $F_Y(y)$ 要么是0要么是1。无论哪种情况都有 $f_Y(y) = 0$