一维随机游动

zcl.space

在随机过程的定义 一节中，我们定义了基于概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$的随机过程$\{\xi(\omega, t), t \in T\}$。针对参数$T$和$\xi_t(\omega)$的状态取值是连续的或者离散的，我们有四种随机过程。

今天，我准备讨论一种随机过程，这种随机过程的参数值是离散的，每个离散时刻的随机变量的可能状态也是离散的。我们称这样的随机过程为离散参数离散值的随机过程。今天的这个过程又叫做一维随机游动。具体描述为：

问题 设有一质点在x轴上做随机游动，即在$t = 0$时，质点位于x轴的原点0，在$t = 1, 2, \ldots$时质点可以在x轴上正向或反向移动一个单位距离。做正向移动一个单位距离的概率为p，做反向移动一个单位距离的概率为$q = 1 - p$。经过时间n，质点偏离原点的距离为k，为处于k的概率是多少？

解答： 首先，我们画出一个可能的随机游动结果：

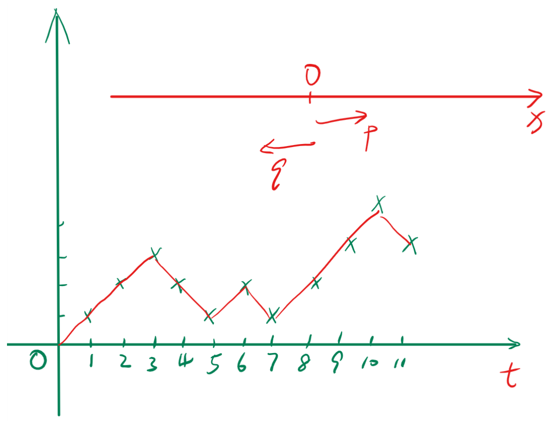

图 1: 一个随机游动的样本函数

设质点每次移动的距离为ξ_i，ξ_i的取值有两种可能$\{+1,-1\}$，且有：

$$
\begin{aligned}
p(\xi_i=+1) &= p \qquad (0.1)\\
p(\xi_i=-1) &= q = 1-p \qquad (0.2)\\
& \qquad (0.3)
\end{aligned}
$$

设质点在$t=n$时远离原点的距离是η_n，则η_n也是一个随机变量。于是：

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \eta_0 = 0 \tag{0.4}$$

又设质点每次游动与该质点所处的位置无关，当$i \neq k$时，ξ_i, ξ_k是相互统计独立的随机变量。图*1* 给出了η_n的样本函数。

如果在n次游动中有m次是正向移动，则$n-m$次是反向移动。则*:*

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i = m(+1) + (n-m)(-1) = 2m - n = k \tag{0.5}$$

即，$m=(n+k)/2$是n次游动中正向游动的次数。所以有：

$$
\begin{aligned}
P(\eta_n = k) &= \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \qquad (0.6)\\
&= \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} \qquad (0.7)
\end{aligned}
$$

上式中m是正整数，说明n,k同奇偶。